Tutorato1 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Gioavnni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 8 marzo 2018.

Esercizio 1. *1. Mostrare che ogni topologia è univocamente determinata dai suoi chiusi.*

2. Mostrare che se X è un insieme e T è una famiglia di sottoinsiemi di X tale che

(a) $\emptyset, X \in T$

(b) $\forall S \subseteq T$, $\bigcap_{Y \in S} Y \in T$

(c) $\forall Y_1, Y_2 \in T \ Y_1 \cup Y_2 \in T$

allora T è l'insieme dei chiusi di una topologia su X

3. Sia

$$f : X \to Y$$

è un'applicazione fra spazi topologici. Mostrare che f è continua sse $\forall C$ insieme chiuso di Y $f^{-1}(C)$ è chiuso in X,

Esercizio 2. *1. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dire quali delle seguenti è una topologia su X.*

(a) $\{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2\}\}$

(b) $\{X, \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

(c) $\{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$

2. Dire se queste topologie sono confrontabili.

Esercizio 3. *Dimostrare che*

1.

$$\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

non è base per alcuna topologia su $\mathbb{R}$

2.

$$\{[a, b] : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, a < b\}$$

è base di una topologia su $\mathbb{R}$

Esercizio 4. *Sia (X, d) uno spazio metrico, mostrare che fissato $y \in X$ l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, y)$, dove su X è stata messa la topologia indotta dalla metrica e su $\mathbb{R}$ quella euclidea) è continua.*

Esercizio 5. *Sia X un insieme non vuoto, consideriamo la metrica "discreta" data da $\forall x, y \in X$ $d(x, y) = 0 \iff x = y$ e $d(x, y) = 1$ altrimenti. Che topologia induce?*

Esercizio 6. *Mostrare che le seguenti famiglie T di sottoinsiemi di X (con X diverso dal vuoto) sono topologie:*

1. *X un qualsiasi insieme infinito, $T := \{Y \subseteq X : X - Y finito\}$ ("Topologia Cofinita")*
2. *scelto $x \in X$, $T := \{Y \subseteq X : x \in Y\}$*
3. *X un qualsiasi insieme infinito, $T := \{Y \subseteq X : X - Y numerabile\}$ ("Topologia Conumerabile")*
4. *$X = \mathbb{R}$, $T := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{X\} \cup \{\emptyset\}$*
5. *$X := \mathbb{K}^n$ dove $\mathbb{K}$ è un campo $T := \{Y \subseteq X : \exists S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $X - Y = \{p \in X : \forall f \in S, f(p) = 0\}\}$ ("Topologia di Zarisky")*

Esercizio 7. *Dire se i seguenti insiemi sono aperti (quando non specificato, della topologia euclidea).*

1. $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$
2. $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}$$
3. $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$
4. $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \neq 0\}$$
5. *L'insieme del punto precedente con la topologia di Zarisky.*

Esercizio 8. *Sia $X := \mathbb{R}$ e E la topologia euclidea, S la topologia del punto 4 dell'esercizio precedente, C la cofinita e Z la topologia di Zarisky. Dire al variare di $T, T' \in \{E, S, C, Z\}$ assegnati, quando l'identità $id : (X, T) \to (X, T')$ è un'applicazione continua:*

1. $T = E$, $T' = S$
2. $T = C$, $T' = E$
3. $T = S$, $T' = C$
4. $T = Z$, $T' = C$

5. $T = C$, $T' = Z$

6. $T = E$, $T' = Z$

Esercizio 9.

1. *Verificare che se X è un insieme non vuoto con la topologia banale, tutte le successioni a valori in X convergono a tutti i punti di X.*

2. *Dire, nella situazione dell'Esercizio 3.2, se la successione $x_n = x$ converge e se sì dire a cosa.*

3. *Dire se la successione a valori in $\mathbb{R}$ $x_n = \frac{1}{n}$ converge se su $\mathbb{R}$ si mette la topologia euclidea e quella cofinita.*